Esercizio Si consideri il problema al valore iniziale

$$y'(t) + 2y(t) = x(t), \quad y(0_-) = 2, \quad x(t) = (1 + \sin(t))\mathbb{1}(t).$$

a. Si determini la soluzione $y(t), t > 0$.

b. Si determini la risposta impulsiva $h(t)$ associata al sistema.

c. Si determini la risposta forzata con ingresso $x(t) = \delta(t) - (1 + j)\delta(t - 1)$.

d. Dire se il sistema LTI causale associato è BIBO-stabile.

Svolgimento.

a. Applicando la trasformata di Laplace unilatera si ottiene

$$sY(s) - 2 + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Di qui, decomponendo in fratti semplici, si ottiene

$$Y(s) = (17/10)(s + 2)^{-1} + (1/2)(1/s) + (2/5)(s^2 + 1)^{-1} - (s/5)(s^2 + 1)^{-1},$$

e quindi, per $t > 0$,

$$y(t) = (1/2) + (17/10)e^{-2t} + (2/5)\sin t - (1/5)\cos t.$$

b. $H(s) = (s + 2)^{-1}$ da cui $h(t) = e^{-2t}\mathbb{1}(t)$.

c. Dalla tempo invarianza, segue che $y_f(t) = h(t) - (1 + j)h(t - 1) = e^{-2t}\mathbb{1}(t) - (1 + j)e^{-2(t-1)}\mathbb{1}(t - 1)$.

d. Il sistema associato è BIBO-stabile visto che la funzione di trasferimento $H(s)$ è propria ed ha tutti i poli in $\Re[s] < 0$ (unico polo in $s = -2$).

Esercizio Si consideri una rete RLC

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = x(t).$$

Siano $L = 4$, $R = 8$ e $C = \frac{1}{8}$ e $x(t) = 4\delta(t - \pi)$. Si trovi:

a. la risposta forzata $y_f(t)$ (cioè per $y(0-) = 0$, $y'(0-) = 0$);

b. l'istante temporale in cui tale risposta ha valore assoluto massimo;

c. il valore asintotico di tale risposta.

Svolgimento.

a. L'equazione è

$$4y'' + 8y' + 8y = 4\delta(t - \pi).$$

Trasformando secondo Laplace otteniamo

$$Y(s) = \frac{4e^{-\pi s}}{4s^2 + 8s + 8} = \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2 + 1}.$$

di qui otteniamo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = e^{-(t-\pi)}\sin(t - \pi)\mathbb{1}(t - \pi) = -e^{-(t-\pi)}\sin(t)\mathbb{1}(t - \pi)$$

b. il valore assoluto è massimo in corrispondenza del primo punto critico. Visto che, per $t > \pi$, $y'(t) = -e^{-(t-\pi)}\cos(t) + e^{-(t-\pi)}\sin(t)$, si ha che il primo punto critico (massimo) è a $t = \frac{5\pi}{4}$;

c. a causa dell'esponenziale decrescente, $\lim_{t\to+\infty} y_f(t) = 0$.

Esercizio Si consideri il problema ai valori iniziali

$$y''(t) + 3y'(t) = x(t), \quad y(0_-) = 0, y'(0_-) = -3.$$

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$;

b. dire se il corrispondente sistema convoluzionale causale associato è BIBO stabile;

c. determinare la risposta libera $y_l(t),\ t > 0$;

d. determinare la risposta forzata $y_f(t),\ t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = 4\mathbb{1}(t)$.

Svolgimento.

a. La funzione di trasferimento si scrive direttamente dall'equazione differenziale $H(s) = (s^2 + 3s)^{-1}$;

b. il corrispondente sistema convoluzionale causale associato non è BIBO stabile in quanto $H(s)$ ha un polo nell'origine $s = 0$;

c. essendo $s(s+3) = 0$ l'equazione caratteristica associata, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(t) = c_1 + c_2 e^{-3t}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene che la risposta libera $y_l(t) = -1 + e^{-3t}$ per $t > 0$. Alternativamente, si poteva usare la trasformata unilatera di Laplace (vedi il prossimo punto);

d. applicando la trasformata unilatera ad entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\left(s^2 + 3s\right) Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) - 3y(0_-) = \frac{4}{s}.$$

Di qui, si ottiene

$$Y(s) = -\frac{3}{s(s+3)} + \frac{4}{s^2(s+3)}.$$

Il primo addendo a secondo membro è $Y_l(s)$, cioè la trasformata della parte libera della risposta. Scrivendo $-\frac{3}{s(s+3)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+3}$ e antitrasformando si ottiene $y_l(t)$ come al punto precedente. Per la parte forzata, serve decomporre $Y_f(s)$ in fratti semplici come segue

$$Y_f(s) = \frac{4}{s^2(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s+3}.$$

Si trova subito

$$A_2 = \lim_{s\to 0} s^2 Y_f(s) = \frac{4}{3}, \quad B = \lim_{s\to -3}(s+3)Y_f(s) = \frac{4}{9}.$$

Inoltre,

$$Y_{f_1}(s) = Y_f(s) - \frac{4}{3}\frac{1}{s^2} = -\frac{4}{3}\frac{1}{s(s+3)}, \quad \lim_{s\to 0} sY_{f_1}(s) = -\frac{4}{9}.$$

Concludiamo che

$$Y_f(s) = -\frac{4}{9}\frac{1}{s} + \frac{4}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{s+3}, \quad y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y_f(s)\right) = -\frac{4}{9}\mathbb{1}(t) + \frac{4}{3}t\mathbb{1}(t) + \frac{4}{9}e^{-3t}\mathbb{1}(t).$$

Esercizio L'equazione integrale

$$y(t) = \int_0^t y(\tau) \cos [3(t-\tau)]\, d\tau + x(t), \quad t > 0,$$

rappresenta la relazione ingresso-uscita di un sistema convoluzionale causale, dove $x(t) = 0$ per $t < 0$.

a. Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

b. A quale equazione differenziale è associabile questo sistema?

Svolgimento.

a. L'integrale a secondo membro è la convoluzione tra $y(t)$ e $\cos 3t$, l'equazione integrale si può dunque riscrivere come

$$y(t) = y(t) * \cos 3t + x(t)$$

e, trasformando secondo Laplace,

$$Y(s) = Y(s)\frac{s}{s^2+9} + X(s)$$

da cui si ricava

$$(1 - \frac{s}{s^2+9})Y(s) = X(s)$$

ovvero

$$H(s) = \frac{s^2+9}{s^2-s+9}.$$

b. Per ispezione della $H(s)$ si ottiene

$$y''(t) - y'(t) + 9y(t) = x''(t) + 9x(t).$$

Esercizio

In una rete LC, la tensione impressa $x(t) = v_s(t)$ è data da

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La carica sul condensatore $y(t) = q(t)$ soddisfa

$$y''(t) + 4y(t) = x(t).$$

Si trovi la soluzione *generale* dell'equazione differenziale per $t \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'equazione caratteristica è $s^2 + 4 = 0$ con soluzioni $\pm 2j$. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y''(t) + 4y(t) = 0$ è quindi $y_o(t) = c_1 e^{j2t} + c_2 e^{-j2t}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ o, equivalentemente, $y_o(t) = d_1 \sin 2t + d_2 \cos 2t, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. Come soluzione particolare della non omogenea, visto che $x(t) = 0$ per $t < 0$, possiamo utilizzare la risposta forzata del corrispondente sistema convoluzionale causale. Dall'equazione differenziale otteniamo che la funzione di trasferimento di tale sistema è $H(s) = (s^2 + 4)^{-1}$. Quindi

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}.$$

Visto che la decomposizione in fratti semplici fornisce

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2(t - \pi))\right) \mathbb{1}(t - \pi) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2(t - 2\pi))\right) \mathbb{1}(t - 2\pi) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right) \left(\mathbb{1}(t - \pi) - \mathbb{1}(t - 2\pi)\right). \end{aligned}$$

Concludiamo che la soluzione generale è data da

$$y(t) = d_1 \sin 2t + d_2 \cos 2t + \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{3\pi}{2}}{\pi}\right), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C}$$